华侨大学 2015 年硕士研究生入学考试专业课试卷

（答案必须写在答题纸上）

招生专业 基 础 数 学

科目名称 数学分析 **科目代码** 723

一、求下列极限及积分（本大题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-2x}}{x^2}}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos 2x}{x\sin x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{|x|}+\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}\right)$；　　（4）$\int x^2\ln x dx$；

（5）$\int_1^{64}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

二、（本大题满分 10 分）

设 $x_1=\sqrt{2},\ x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，$n=1,2,\cdots$，试证：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在并求其极限值.

三、（本大题满分 13 分）

证明：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续（其中常数 $a>0$），但在 $(0,1)$ 上不一致连续.

四、（本大题满分 10 分）

设 y 是由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定的 x 的函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

五、（本大题满分 12 分）

证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 在原点连续且偏导数存在，但在原点不可微.

六. (本大题满分 15 分)

设曲线 $y=ax^2(a>0,x\geq 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过原点 O 与 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形，求①此平面图形面积；②当 a 为何值时，该平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最大，最大为多少？

招生专业 基 础 数 学

科目名称 数学分析 **科目代码** 723

七、（本大题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x} dxdy$，其中 D 是由直线 $y = x$ 及抛物线 $y = x^2$ 所围区域.

八、（本大题满分 10 分）

求 $I = \iint\limits_S xdydz + ydzdx + (z^2 - 2z)dxdy$，其中曲面 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被平面 $z = 0,\ z = 1$ 所截部分并取外侧.

九、（本大题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域及和函数.

十、（本大题满分 10 分）

证明：含参量积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛（其中 $b > a > 0$）.

十一. （本大题满分 10 分）

叙述魏尔斯特拉斯聚点定理并用闭区间套定理证明之.