华侨大学 2015 年硕士研究生入学考试专业课试卷

（答案必须写在答题纸上）

招生专业 基础数学

科目名称 高等代数 **科目代码** 823

一、计算题（本题共 5 小题，每小题 10 分，满分 50 分）

1、求解数域 K 上的非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2-x_3=3 \end{cases}$.

2、设 A， B 均为 n 级方阵，$|A|=2, |B|=3$，求 $|2A^*B^{-1}|$.

3、计算 A^n（n 是正整数），其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4、设 $f(x)=x^3+x^2-7x+2$， $g(x)=3x^2-5x-2$，用辗转相除法求 $(f(x),g(x))$.

5、求复数域上下述矩阵的 Jordan 标准型

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}.$$

二、（本小题 15 分）

证明：数域 K 上奇数级反对称矩阵的行列式等于零.

三、（本小题 15 分）

证明：设 f 是一个有限集到它自身的映射，则 f 是单射当且仅当它是满射.

招生专业 基础数学

科目名称 高等代数 **科目代码** 823

四、（本小题 20 分）

证明：实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是：存在可逆实对称矩阵 C 使得

$$A = C^2.$$

五、（本小题 20 分）

设实数域上的 3 级对称矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{bmatrix},$$

作直角坐标变换把二次曲面 $X^T AX = 1$ 化成标准方程，并指出是什么二次曲面.

六、（本小题 15 分）

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个不同的整数，设 $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1$，证明：如果 n 是奇数，则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

七、（本小题 15 分）

设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基. 设 V 上的一个线性变换 $\underline{A}$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的表示矩阵是 A，证明：线性变换 $\underline{A}$ 的秩等于矩阵 A 的秩，即

$$\mathrm{rank}(\underline{A}) = \mathrm{rank}(A).$$