华侨大学 2016 年硕士研究生入学考试专业课试卷

（答案必须写在答题纸上）

招生专业 基础数学

科目名称 数学分析(A) **科目代码** 723

一、填空题：（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 4}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=$_____.　　**2.** $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=$_____.

3. 写出曲线$\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^2 \end{cases}$在对应$t=2$点处的法线方程：_____.

4．交换积分次序$\int_0^1 dx\int_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy=$_____.

5．函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在点$P_0(1,2,3)$处沿方向$\vec{l}(2,-2,1)$的方向导数为_____.

二．求下列极限（本题共 2 小题，其中第 1 小题 8 分，第 2 小题 10 分，共计 18 分）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.　　**2.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e]}{1-\cos 2x}$.

三．计算下列积分（本题共 5 小题，其中第 1 小题 6 分，第 2、3、4、5 小题各 10 分，共计 46 分）

1．$\int\sqrt{1-x^2}dx$.　　**2.** $\int_0^1\arctan(1+\sqrt{x})dx$.　　**3.** $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx$.

4．$\iint\limits_D\frac{\sin x}{x}dxdy$，其中$D$是由直线$y=x$及抛物线$y=x^2$所围区域.

5. $\iint\limits_S ydydz-xdzdx+z^2dxdy$，其中曲面$S$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1,\ z=2$所截部分并取外侧.

四、（12 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+2^n}{n}x^n$的收敛域及和函数.

招生专业 **基础数学**

科目名称 **数学分析(A)** **科目代码** **723**

五、(12 分) 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明：函数 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上（其中常数 $0<a<1$）一致连续，但在区间 $(0,\ 1]$ 上不一致连续.

六、(8 分) 写出“数 η 为非空数集 S 的上确界”的定义，并用定义验证“数 1 是集合 $S=\left\{x\,\middle|\,x=1-\frac{1}{2^n},n\in N_+\right\}$ 的上确界”.

七、(8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微且 $a\cdot b>0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=\xi\cdot\ln\frac{b}{a}\cdot f'(\xi)$.

八、(10 分) 证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 在原点连续，但在原点不可微.

九、(8 分) 证明：含参量反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}dy$ 在 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上一致收敛但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

十、(8 分) 请用有限覆盖定理证明闭区间上连续函数的零点定理.